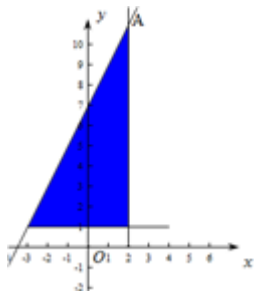


2017 年钦州一中高二数学 寒假作业四（文科）参考答案

1. D 【解析】 $\because A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ 中的元素 2, 3, 4, 重合, 所以 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, 即 $A \cup B$ 中元素的个数为 4, 故选 D.

2. B 【解析】 $\because \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{4}, \therefore (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{9}{16}, 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{16}, \therefore 2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{7}{16},$
 $\therefore \sin 2\alpha = -\frac{7}{16}$, 故选 B.



3. D 【解析】

$$2x - y + 7 \geq 0$$

画出约束条件 $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 表示的可行域, 由 $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ 可得 $A(2, 11)$, 平移直线 $z = 3x + 2y$,

当直线经过 $A(2, 11)$ 时, 直线在 y 轴上的截距最大, z 也最大, 最大值为 $3 \times 2 + 2 \times 11 = 28$, 故选 D.

4. C 【解析】当 $k = -\frac{4}{3}$ 时, 圆心到直线 $y = -\frac{4}{3}x + 1$ 的距离为 $\frac{\left|-\frac{8}{3} + 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 1}} = 1$, 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 1$ 与圆

$(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切, 必要性成立; 若直线 $y = kx + 1$ 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切, 斜率不存在 ($x = 1$ 与圆也相切), 或 $k = -\frac{4}{3}$, 充分性不成立, 所以“直线 $y = kx + 1$ 与圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切”是“ $k = -\frac{4}{3}$ ”必要不充分条件, 故选 C.

5. A 【解析】因为向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 1)$, 所以 $\vec{a} + \vec{b} = (-2, 3)$, 又因为 $\vec{c} = (4, x)$, 且 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 平行, 所以 $-2x - 3 \times 4 = 0, x = -6$, 所以 $|\vec{c}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$, 故选 A.

6. C 【解析】因为

$$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5}\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \varphi\right] \leq \sqrt{5}, \therefore$$

函数的最大值为 $\sqrt{5}$, 故选 C.

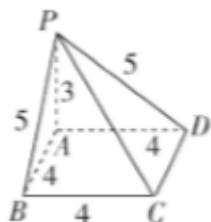
7. A 【解析】 $\because \log_2 4 = 2 < a = \log_2 5 < b = \log_2 6 < \log_2 8 = 3$, $c = 9^{\frac{1}{2}} = 3$, $\therefore c > b > a$, 故选 A.

8. A 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{2}{x} - ax$, 所以 $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - a$, 函数 $f(x) = \frac{2}{x} - ax$ 的图象在点 $(-1, f(-1))$

处的切线斜率是1, $\therefore f'(-1) = -2 - a = 1, a = -3$, $f(-1) = -2 + a = -5$ 函数 $f(x) = \frac{2}{x} - ax$ 的图象在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程是 $y + 5 = 1 \times (x + 1)$, 即 $x - y - 4 = 0$, 故选 A.

9. B 【解析】该几何体是如图所示的一个四棱锥 $P-ABCD$, 所以表面积为 $S = 2 \times (\frac{3 \times 4}{2} + \frac{5 \times 4}{2}) + 4 \times 4 = 48$.

本题选择 B 选项.



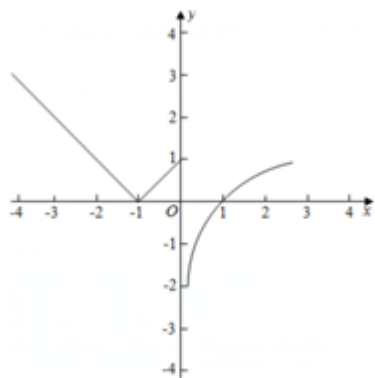
10. D 【解析】输入参数 $s = 0, k = 0$, 第一次循环: $k = 2, s = \frac{1}{2}$; 第二次循环: $k = 4, s = \frac{3}{4}$; 第三次循环: $k = 6, s = \frac{11}{12}$; 第四次循环: $k = 8, s = \frac{25}{24}$; 第五次循环: $k = 10, s = \frac{25}{24} + \frac{1}{20}$; 退出循环, 输出结果 $k = 10$, 故第四次循环完后, $s = \frac{25}{24}$ 满足判断内的条件, 而第五次循环完后 $s = \frac{25}{24} + \frac{1}{20}$, 不满足判断内条件, 故判断内填入的条件是 $s = \frac{25}{24}$, 故选 D.

11. B 【解析】椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的上、下顶点分别为 A_1, A_2 , 则 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$,

故圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径为 a , 又圆与直线 $2bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 故 $\frac{2ab}{\sqrt{4b^2 + a^2}} = b$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$,

联立可得 $a^2 = 4c^2$, 故离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 故选 B.

12. C



【解析】

$\because g(x) = x^2 - 2x$, 设 a 为实数, $\therefore 2g(a) = 2a^2 - 4a, a \in R$, $\because y = 2a^2 - 4a, a \in R$, 由函数

$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & e^{-2} \leq x \leq e \end{cases}$, 可得 $f(-7) = 6, f(e^{-2}) = -2$, 画出函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & e^{-2} \leq x \leq e \end{cases}$ 的图象,

由函数 $f(x)$ 的图象可知, $f(x)$ 值域为 $[-2, 6]$, $\therefore$ 存在实数 m , 使 $f(m) - 2g(a) = 0$,

$\therefore -2 \leq 2a^2 - 4a \leq 6$ ，即 $-1 \leq a \leq 3$ ，实数 a 的取值范围为 $[-1, 3]$ ，故选 C.

13. $2\sqrt{2}$ 【解析】 $\because x + 2y = 1$ ，则 $2^x + 4^y = 2^{1-2y} + 2^{2y} \geq 2\sqrt{2^{1-2y} \times 2^{2y}} = 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $2^{1-2y} = 2^{2y}$ ，等号成立，所以 $2^x + 4^y$ 的最小值为故答案为 $2\sqrt{2}$.

14. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 q ， $\because a_1 = \frac{1}{4}$ ， $a_4 a_6 = 4(a_5 - 1) = a_5^2, (a_5 - 2)^2 = 0, a_5 = 2$ ，

所以 $\frac{a_5}{a_1} = q^4 = 8, q^2 = 2\sqrt{2}, a_3 = a_1 \times q^2 = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故答案为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. $\frac{3x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 【解析】 $\because$ 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ， $\therefore$ 可设双曲线 C 的方程为 $y^2 - 3x^2 = \lambda$ ， $\because$

双曲线 C 经过点 $(2, 2\sqrt{2})$ ， $\therefore -8 \neq \lambda \therefore \lambda = -4 \therefore$ 双曲线 C 的方程为 $y^2 - 3x^2 = -4$ ，可化为

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1，故答案为 \frac{3x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

16. 27

【解析】解： $\because$ 表面积为 60π 的球， $\therefore$ 球的半径为 $\sqrt{15}$ ，

设 $\triangle ABC$ 的中心为 D ，则 $OD = \sqrt{3}$ ，所以 $DA = 2\sqrt{3}$ ，则 $AB = 6$

棱锥 $S-ABC$ 的底面积 $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$ 为定值，

欲使其体积最大，应有 S 到平面 ABC 的距离取最大值，

又平面 $SAB \perp$ 平面 ABC ，

$\therefore S$ 在平面 ABC 上的射影落在直线 AB 上，而 $SO = \sqrt{15}$ ，点 D 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$ ，

则 S 到平面 ABC 的距离的最大值为 $3\sqrt{3}$ ，

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 27.$$

故答案为：27.

$$17. (1) a_n = 2n + 1; (2) T_n = \frac{n}{2n + 2}$$

【解析】试题分析：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 、公差 d ，由 $a_4 = 9, S_3 = 15$ 列出关于首项 a_1 、公差 d 的方程组，解方程组可得 a_1 与 d 的值，从而可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；(2) 由 (1) 可知

$$b_n = \frac{2}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)，利用裂项相消法可求数列 \{b_n\} 的前 n 项和 T_n.$$

试题解析：(1) 依题意：设等差数列的首项为 a_1 ，公差为 d ，则 $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 9 \\ S_3 = 3a_1 + 3d = 15 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } b_n = \frac{2}{2n(2n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{因为 } T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n, \text{ 所以 } T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right],$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{2n+2}$$

$$18. (1) \frac{\pi}{3}; (2) \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】(1) 因为 $a \sin B - \sqrt{3} b \cos A = 0$ 由正弦定理，得 $\sin A \sin B - \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$ ，又 $\sin B \neq 0$ ，从而 $\tan A = \sqrt{3}$ ，由于 $0 < A < \pi$ 所以 $A = \frac{\pi}{3}$

(2) 解法一：由余弦定理，得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，而 $a = \sqrt{7}, b = 2, A = \frac{\pi}{3}$ ，

得 $7 = 4 + c^2 - 2c$ ，即 $c^2 - 2c - 3 = 0$ 因为 $c > 0$ ，所以 $c = 3$ ，

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 面积为 } \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{解法二：由正弦定理，得 } \frac{\sqrt{7}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sin B}$$

$$\text{从而 } \sin B = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ 又由 } a > b \text{ 知 } A > B, \text{ 所以 } \cos B = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{故 } \sin C = \sin(A + B) = \sin \left(B + \frac{\pi}{3} \right) = \sin B \cos \frac{\pi}{3} + \cos B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 面积为 } \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$19. (1) \text{ 证明见解析; } (2) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】试题分析：

(1) 做出辅助线，证得 $BC_1 \parallel DF$ ，结合线面平行的判定定理即可证得 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD 。

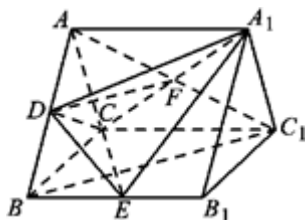
(2) 转化顶点可求得三棱锥 A_1-CDE 的体积 $V_{A_1-CDE} = V_{C-A_1DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

试题解析:

(1) 连接 AC_1 , 交 BC 于点 F ,
 则 F 为 AC_1 的中点, 又 D 为 AB 的中点,
 所以 $BC_1 \parallel DF$,

又 $BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD , 又 $DF \subset$ 平面 A_1CD ,

所以 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD .



(2) 三棱锥 A_1-CDE 的体积

$V_{A_1-CDE} = V_{C-A_1DE} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1DE} \cdot h$. 其中三棱锥 A_1-CDE 的高 h 等于点 C 到平面 ABB_1A_1 的距离, 可知 $h = CD = \sqrt{3}$.

又 $S_{\triangle A_1DE} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{3}{2}$.

所以 $V_{A_1-CDE} = V_{C-A_1DE} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1DE} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $y = 250 + 50x$

【解析】(1) 要使某一医院收治此类病症人数超过 200 人, 则 $t > 150$, 则满足条件的天数共有 50 天, 所以

概率为 $P = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

(2) 设 $x = \ln t$, 则 $\sum_{i=1}^{10} x_i = \sum_{i=1}^{10} \ln t_i = 70$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 6000$, $\sum_{i=1}^{10} y_i x_i =$

$\sum_{i=1}^{10} y_i \ln t_i = 42500$, $\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2 = \sum_{i=1}^{10} (\ln t_i)^2 = 500$, 所以 $\bar{x} = \frac{70}{10} = 7$, $\bar{y} = \frac{6000}{10} = 600$

$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{42500 - 10 \cdot 7 \cdot 600}{500 - 10 \cdot 7^2} = 50$, $a = 600 - 50 \cdot 7 = 250$, 所以拟合曲线

的表达式为 $y = 250 + 50x$

21. (1) $y^2 = 4x$; (2) $16\sqrt{2}$

【解析】(1) 依题意: $1 + \frac{p}{2} = 2$ 解得 $p = 2$, 所以抛物线的方程为 $C: y^2 = 4x$

(2) 依题意: 若直线斜率不存在时, 直线与抛物线只有一个交点, 不符合题意;

所以设直线方程为 $y = kx + 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + 2 \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } k^2 x^2 + (4k - 4)x + 4 = 0$$

$$\text{所以 } \Delta = (4k - 4)^2 - 4k^2 \cdot 4 > 0, x_1 + x_2 = \frac{4 - 4k}{k^2}, x_1 x_2 = \frac{4}{k^2}$$

$$\text{又 } y_1 y_2 = (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = k^2 x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4$$

因为以 AB 为直径的圆过坐标原点, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$

$$\text{所以 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = x_1 x_2 + k^2 x_1 x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{2}, \text{ 由 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 8\sqrt{10}, \text{ 点 } O \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } d = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| d = 16\sqrt{2}.$$

$$22. (1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1; (2) \text{ 见解析.}$$

【解析】(1) 由题意椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 2, 且过点 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$$\text{所以 } c = 1, \frac{2}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1, \text{ 解得 } a = 2, b = \sqrt{3},$$

$$\text{所以椭圆 } E \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ ① 设 } P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0), \text{ 则直线 } AP \text{ 的方程为 } y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2),$$

$$\text{令 } x = 2 \text{ 得 } M\left(2, \frac{4y_0}{x_0 + 2}\right), \text{ 因为 } k_1 = \frac{2y_0}{x_0 + 2}, \text{ 因为 } k_2 = \frac{y_0}{x_0 - 2},$$

$$\text{所以 } k_1 k_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 2}, \text{ 因为 } P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0) \text{ 在椭圆上, 所以 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1,$$

$$\text{所以 } k_1 k_2 = -\frac{3}{2} \text{ 为定值,}$$

$$\text{② 直线 } BP \text{ 的斜率为 } k_2 = \frac{y_1}{x_1 - 2}, \text{ 直线 } m \text{ 的斜率为 } k_m = \frac{2 - x_1}{y_1},$$

则直线 m 的方程为 $y = \frac{x_1 - 2}{y_1}(x - 2) + y_0 = \frac{2 - x_1}{y_1}(x - 2) + \frac{4y_1}{x_1 + 2} = \frac{2 - x_1}{y_1}(x + 1)$,

所以直线 m 过定点 $(-1, 0)$.