

2017 年钦州一中高二数学 寒假作业四 理科 参考答案

1. C 【解析】由等差数列的通项公式可知： $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$ ，结合题意可得： $2(n-2) = 24$ ，求解关于实数 n 的方程可得： $n = 14$ 。

2. A 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\} = (-1, 3)$ 且 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的充分不必要条件，所以 $3 < m$ ，故选 A。

3. D 【解析】因为 $(-x)^3 \neq x^3$ ，根据偶函数的定义知， $y = x^3$ 不是偶函数， $y = \ln|x|$ 是偶函数，在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数， $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ 是偶函数，在区间 $(0, +\infty)$ 上不是单调函数， $y = -x^2 - 1$ 是偶函数，且在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数，故选 D。

4. A 【解析】由题意结合向量的运算法则可得：

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 9 - 2 \times 4 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

据此有： $1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = -2, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ ，

设两向量的夹角为 θ ，则： $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \times |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \times 2} = -\frac{1}{2}, \therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$ ，

即 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 。

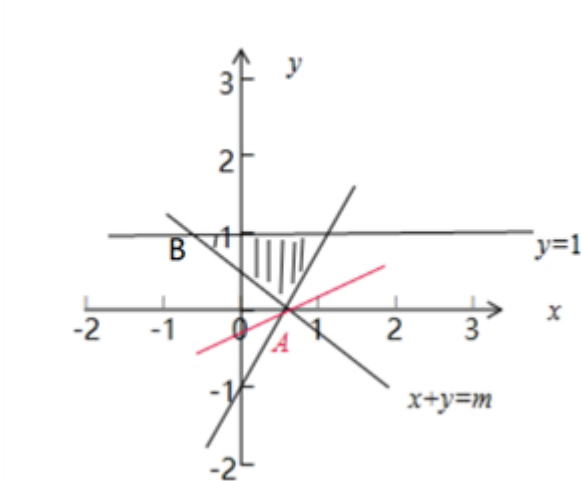
5. C 【解析】因为甲组数据的中位数为 15，所以 $x = 5$ ，因为乙组数据的平均数为 16，所以由 $\frac{9 + 15 + 10 + y + 18}{5} = 16$ 得 $y = 8$ ，故选 C。

6. A 【解析】因为角 α 的终边过点 $P(-8m, -6\sin 30^\circ)$ ，所以 $r = \sqrt{64m^2 + 9}$ ， $\cos \alpha = \frac{-8m}{r} = -\frac{4}{5}$ ，解得 $m = \frac{1}{2}$ ，故选 A。

7. B 【解析】抛物线的焦点坐标为 $F(-1, 0)$ ，准线方程为 $x = -1$ ，因为抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一点 P 到焦点的距离为 5，由抛物线定义可知，点 P 到准线 $x = -1$ 的距离是 5。

则点 P 到 x 轴的距离是 4，所以 $\triangle PFO$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$ ，故选 B。

8. C 【解析】作出不等式组对应的平面区域如图：



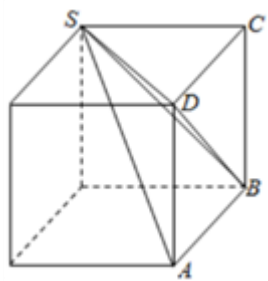
由目标函数 $z = x - y$ ，得 $y = x - z$ ，如图所示，当直线 $y = x - z$ 过点 B 时， z 最小，把 $B(m-1, 1)$ 代入 $z = x - y = m - 1 - 1 = -2$ ，解得 $m = 0$ ，故选 C 。

9. D 【解析】试题分析： $\because f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ ， $\therefore f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称， $\therefore f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ，即 $a = -b$ ，直线

$ax - by + c = 0$ 的斜率 $k = \frac{a}{b} = -1$ ，其倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ ，故选 D。

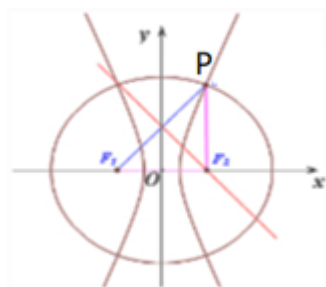
考点：1.三角函数的对称性；2.直线的斜率与倾斜角。

10. A 【解析】由三视图知该几何体为棱锥 $S - ABD$ ，其中 $SC \perp$ 平面 $ABCD$ ，



此三棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$ 。故选 A。

11. A 【解析】设 $|F_1P| = m$ ， $|F_2P| = n$ ，如图：



则 $m+n=2a_1, m-n=2a_2, m^2+n^2=4c^2$ ，可得： $a_1^2+a_2^2=2c^2$ ，即 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=2$ ，由重要不等式知

$$\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)^2 \leq 2\left(\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}\right)，所以 \frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2} < 2(e_1 \neq e_2)，故选 A.$$

12. D 【解析】实数 x, y 满足 $x > y > 0$ ，且 $\frac{1}{x-y} + \frac{4}{x+2y} = 1$ ，则

$$x + y - \frac{1}{3}(x-y) - \left(\frac{2}{3}y + 2\right) = x\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(2 + \frac{1}{3}\right)\right] + y\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left(9 + \frac{2(x+2y)}{x-y} + \frac{4(x-y)}{x+2y}\right) \geq \frac{1}{3}(9 + 2 \times \sqrt{8}) = \frac{9+4\sqrt{2}}{3}，当且仅当 \frac{2(x+2y)}{x-y} = \frac{4(x-y)}{x+2y}，即 x=4, y=1 时等号$$

成立. 故选 D.

$$13. 5x + y + 2 = 0$$

【解析】 $\because y' = -5e^x, y'|_{x=0} = -5, \therefore$ 切线方程为 $y + 2 = -5x$ ，即 $5x + y + 2 = 0$.

$$14. \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

【解析】正四面体补成为正方体，它们的外接球是同一个球，正方体的对角线长就是球的直径，正四面体的棱长为 $\sqrt{2}$ ，即正方体面上的对角线长为 $\sqrt{2}$ ，所以正方体棱长为 1，对角线长为 $\sqrt{3}$ ，所以球的体积为：

$$\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}，故填 \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

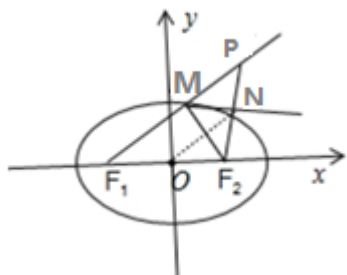
$$15. \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，中点 $M(x_0, y_0)$ ，则 $\frac{x_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{4} = 1, \frac{x_2^2}{8} - \frac{y_2^2}{4} = 1$ ，两式相减，化简得：

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{8} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_2 + y_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0}{y_0}，又中点在直线上，所以 y_0 = 2x_0 - 1，联立解得：x_0 = \frac{4}{7}, y_0 = \frac{1}{7}，故填(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}).$$

$$16. x^2 + y^2 = a^2$$

【解析】如图所示，



设 F_2N 交 F_1M 于点 P ，由已知可得： $MN \perp F_2P$ ， $\angle F_2MN = \angle PMN$

$\therefore MP = F_2M$ ，点 N 为线段 F_2P 的中点.

连接 ON ，则 ON 为 $\triangle F_1F_2P$ 的中位线， $\therefore ON = \frac{1}{2}PF_1$ ， $\because PF_1 = F_1M + F_2M = 2a$ ，

$\therefore ON = a$ ，即 N 点的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = a^2$

17. (I) $a_n = 2^{n-1}$ (II) $\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$

【解析】试题分析：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，根据已知由等比数列的性质可得 $a_1(1+q^3) = 9, a_1^2q^3 = 8$ ，联立解方程再由数列 $\{a_n\}$ 为递增数列可得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ 则通项公式可得

(2) 根据等比数列的求和公式，有 $a_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ 所以 $a_n = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$ ，裂项求和即可

试题解析：(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，所以有 $a_1 + a_4 = a_1(1+q^3) = 9, a_2a_3 = a_1^2q^3 = 8$

联立两式可得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ 又因为数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $q > 1$ ，所以 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$

(2) 根据等比数列的求和公式，有 $a_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$

$$\text{所以 } a_n = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$\text{所以 } a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$$

18. (1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $2\sqrt{3}$

【解析】试题分析：(1) 根据数量积的定义得 $c \cos B + (b-2a) \cos C = 0$ ，由正弦定理得 $\sin A - 2 \sin A \cos C = 0$ ，即

可求出；(2) 利用向量的几何意义和向量的模的计算以及余弦定理和三角形的面积公式即可求出.

试题解析：

(1) 由 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，得 $c \cos B + (b-2a) \cos C = 0$ ，

由正弦定理可得 $\sin C \cos B + (\sin B - 2 \sin A) \cos C = 0$ ， $\therefore \sin A - 2 \sin A \cos C = 0$ ，

$\because \sin A \neq 0$ ， $\therefore \cos C = \frac{1}{2}$ ， $\because C \in (0, \pi)$ ， $\therefore C = \frac{\pi}{3}$

$$(2) \because \overline{AD} = \overline{DB}, \therefore \overline{CD} - \overline{CA} = \overline{CB} - \overline{CD}, 2\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{CB},$$

$$\text{又 } |\overline{CD}| = \sqrt{7}, c = 2\sqrt{3}, \text{ 两边平方: } 4|\overline{CD}|^2 = b^2 + a^2 + 2ab\cos C = b^2 + a^2 + ab = 28 \quad ①$$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - ab = 12 \quad ②, \text{ 由 } ①② \text{ 可得 } ab = 8$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 2\sqrt{3}.$$

$$19. (1) a=0.005 \quad (2) 74.5 \quad (3) \frac{1}{3}$$

【解析】试题分析：(1) 由频率分布图中小矩形面积和为 1，能求出 a 的值

(2) 由频率分布直方图，同一组中的数据用该组区间的中点值作代表即可估计这 100 名学生期中考试数学成绩的平均分.

(III) 现用分层抽样的方法从第 3、4、5 组中随机抽取 6 名学生，则第 3、4、5 组分别抽取 3 人、2 人、1 人，

由此利用对立事件概率计算公式能求出从中随机抽取 2 名，第 4 组的至少有一位同学入选的概率.

试题解析：(1) 由题意得 $10a+0.01\times 10+0.02\times 10+0.03\times 10+0.035\times 10=1$ ，所以 $a=0.005$.

(2) 由直方图分数在 [50, 60] 的频率为 0.05, [60, 70] 的频率为 0.35, [70, 80] 的频率为 0.30, [80, 90] 的频率为 0.20, [90, 100] 的频率为 0.10, 所以这 100 名学生期中考试数学成绩的平均分的估计值为：
 $55\times 0.05+65\times 0.35+75\times 0.30+85\times 0.20+95\times 0.10=74.5$

(3) 由直方图，得：

第 3 组人数为 $0.3\times 100=30$ 。

第 4 组人数为 $0.2\times 100=20$ 人，

第 5 组人数为 $0.1\times 100=10$ 人.

所以利用分层抽样在 60 名学生中抽取 6 名学生，

每组分别为：

$$\text{第 3 组: } \frac{30}{60}\times 6=3 \text{ 人,}$$

$$\text{第 4 组: } \frac{20}{60}\times 6=2 \text{ 人,}$$

$$\text{第 5 组: } \frac{10}{60}\times 6=1 \text{ 人.}$$

所以第 3、4、5 组分别抽取 3 人、2 人、1 人. ...

设第 3 组的 3 位同学为 A_1, A_2, A_3 , 第 4 组的 2 位同学为 B_1, B_2 , 第 5 组的 1 位同学为 C_1 , 则从六位同学中抽两位同学有 15 种可能如下：

$(A_1, A_2), (A_1, A_3), (B_1, B_2), (A_2, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_1, C_1), (A_2, C_1), (A_3, C_1), (B_1, C_1), (B_2, C_1),$

其中恰有 1 人的分数不低于 90 (分) 的情形有： $(A_1, C_1), (A_2, C_1), (A_3, C_1), (B_1, C_1), (B_2, C_1),$ 共 5 种. ...

所以其中第 4 组的 2 位同学至少有一位同学入选的概率为 $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$$20. \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2} \right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

【解析】试题分析：直线方程与双曲线方程联立，消去 y 并整理得关于 x 的方程，因为有两个不同交点，利用判别式确定 a 的范围，即可求出离心率的范围.

试题解析：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 得 } (1-a^2)y^2 + 2y + 1 - a^2 = 0, \text{ 由于直线与双曲线有两个不同的交点, 则 } 1-a^2 \neq 0 \text{ 且 } \Delta = 4 - 4(1-a^2)^2 > 0, \text{ 解得 } 0 < a < 1 \text{ 或 } 1 < a < \sqrt{2}$$

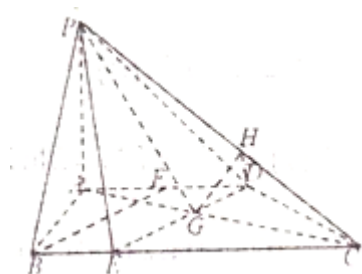
$$\therefore e^2 = \frac{a^2+1}{a^2} = 1 + \frac{1}{a^2} \in \left(\frac{3}{2}, 2 \right) \cup (2, +\infty), \quad e \in \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2} \right) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

$$21. (1) \text{ 详见解析 } (2) \frac{\sqrt{15}}{5}$$

【解析】

试题分析：(1) 证明线面垂直，一般多次利用线面垂直判定定理及性质定理，经多次线线垂直与线面垂直的转化进行论证：在线线垂直论证与寻找时，要注意利用平面几何的条件，如本题就利用两三角形相似 $\triangle BAF \sim \triangle CBA$ ，得到 $BF \perp AC$ ，再根据线面垂直性质定理将条件 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 转化为线线垂直： $PA \perp ED$ ，最后根据线面垂直判定定理得 $ED \perp$ 平面 PAC (2) 线面角找射影，由 (1) 知直线 PE 在平面 PAC 上射影为 PG (G 为 ED 与 AC 交点)，则 $\angle EPG$ 是直线 PE 与平面 PAC 所成的角，二面角的作法，往往结合三垂线定理：作 $GH \perp PC$ 于 H ，由 $PC \perp$ 平面 HDG ， $\therefore PC \perp DG$ ， $\therefore \angle GHD$ 是二面角 $A-PC-D$ 的平面角，最后结合对应三角形求角的三角函数值. 本题也可建立空间直角坐标系进行论证、求解.

试题解析：



法一：(1)

取 AD 中点 F ，连接 BF ，则 $FD \parallel BE$ ，

$\therefore$ 四边形 $FBED$ 是平行四边形， $\therefore FB \parallel ED$.

$\because$ 直角 $\triangle BAF$ 和直角 $\triangle CBA$ 中, $\frac{BA}{AF} = \frac{CB}{BA} = 2$, $\therefore$ 直角 $\triangle BAF \sim$ 直角 $\triangle CBA$, 易知 $BF \perp AC$,

$\therefore ED \perp AC$

又 $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp ED$

而 $PA \cap AC = A$, $\therefore ED \perp$ 平面 PAC , 得证

(2) 由 $\triangle AGD \sim \triangle CGE$, 知 $\frac{DG}{GE} = \frac{AD}{EC} = \frac{2}{3}$, $\because AB = AD = 2$, $\therefore EG = \frac{3}{5}DE = \frac{3\sqrt{5}}{5}, DG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

设 ED 交 AC 于 G , 连接 PG , 则 $\angle EPG$ 是直线 PE 与平面 PAC 所成的角,

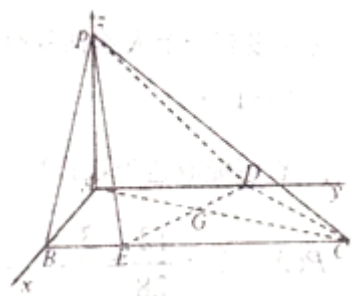
$\sin \angle EPG = \frac{EG}{EP} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\therefore PE = 3$, 而 $AE = \sqrt{5}$ 故 $PA = \sqrt{PE^2 - AE^2} = 2$

作 $GH \perp PC$ 于 H , 由 $PC \perp DE$, 知 $PC \perp$ 平面 HDG , $\therefore PC \perp DG$, $\therefore \angle GHD$ 是二面角 $A-PC-D$ 的平面角

$\because \triangle PCA \sim \triangle GCH$, $\therefore \frac{PA}{GH} = \frac{PC}{GC}$, 而 $GC = \sqrt{CE^2 - EG^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore GH = \frac{PA \cdot GC}{PC} = \frac{\sqrt{30}}{5}$, $\therefore \tan \angle GHD = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\therefore \cos \angle GHD = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 即二面角 $A-PC-D$ 的平面角的余弦值为

$$\frac{\sqrt{15}}{5}$$



法二:

(1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore AB \perp PA$, 又 $\because AB \perp AD$, 故可建立如图所示坐标系

由已知 $D(0, 2, 0), E(2, 1, 0), C(2, 4, 0), P(0, 0, \lambda) (\lambda > 0)$, $\therefore \overrightarrow{AC} = (2, 4, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, \lambda)$, $\overrightarrow{DE} = (2, -1, 0)$, $\therefore$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 4 + 0 = 0 \quad \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$\therefore DE \perp AC, DE \perp AP$, $\therefore ED \perp$ 平面 PAC

(2) 由 (1), 平面 PAC 的一个法向量是 $\overrightarrow{DE} = (2, -1, 0), \overrightarrow{PE} = (2, 1 - \lambda)$,

设直线 PE 与平面 PAC 所成的角为 θ , $\therefore \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DE} \rangle \right| = \left| \frac{4 - 1}{\sqrt{5}\sqrt{5 + \lambda}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\lambda = \pm 2$,

$\because \lambda > 0$, $\therefore \lambda = 2$, 即 $P(0, 0, 2)$

设平面 PCD 的一个法向量为 $n = (x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{DC} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DP} = (0, -2, 2)$,

由 $n \perp \overrightarrow{DC}, n \perp \overrightarrow{DP}$, $\therefore \begin{cases} 2x_0 + 2y_0 = 0 \\ -2y_0 + 2z_0 = 0 \end{cases}$, 令 $x_0 = 1$, 则 $n = (1, -1, -1)$

$\therefore \cos \langle n, \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{2 + 1}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

显然二面角 $A - PC - D$ 的平面角是锐角,

$\therefore$ 二面角 $A - PC - D$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

2. 利用数量积可解决有关垂直、夹角、长度问题.

(1) $a \neq 0, b \neq 0, a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$;

(2) $|a| = \sqrt{a^2}$;

(3) $\cos \langle a, b \rangle = \frac{ab}{|a||b|}$.

22. (I) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) $\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

【解析】(I) 由 $e = \frac{1}{2}$ 得 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 即 $a = 2c, \therefore b = \sqrt{3}c$.

由右焦点到直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 的距离为 $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

得: $\frac{|bc - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 解得 $a = 2, b = \sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

直线 AB 的方程为 $y = kx + m$,

与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立消去 y 得 $3x^2 + 4(k^2x^2 + 2kmx + m^2) - 12 = 0$,

$$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}.$$

$$\because OA \perp OB, \therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$

$$\therefore x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0.$$

$$\text{即 } (k^2 + 1)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0, \therefore (k^2 + 1)\frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2m^2}{3 + 4k^2} + m = 0,$$

整理得 $7m^2 = 12(k^2 + 1)$ 所以 O 到直线 AB 的距离

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because OA \perp OB, \therefore OA^2 + OB^2 = AB^2 \geq 2OA \cdot OB, \quad \text{当且仅当 } OA=OB \text{ 时取“=”号。}$$

$$\text{由 } d \cdot AB = OA \cdot OB \text{ 得 } d \cdot AB = OA \cdot OB \leq \frac{AB^2}{2},$$

$$\therefore AB \geq 2d = \frac{4\sqrt{21}}{7},$$

$$\text{即弦 } AB \text{ 的长度的最小值是 } \frac{4\sqrt{21}}{7}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$