

2017 年秋钦州一中高二期末数学寒假作业二(理科) 参考答案

一、选择题： CDCBBA BACCB 13. 10; 14. $\sqrt{38}$ 15. $\frac{3}{2}$; 16. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

7. B 【解析】 $\because$ 点 $M(1, 3)$ 在抛物线 $y^2 = 4x$ 的外部, $\therefore$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 只有一个公共点的直线 l 有三条, 分别是有两条直线与抛物线相切, 有一条直线与抛物线的对称轴平行,

8.A 【解析】根据异面直线上两点间的距离公式 $EF = \sqrt{d^2 + m^2 + n^2 \pm 2mn \cos \theta}$, 对于本题中, $d = a$, $m = a$, $n = 2$, $\theta = 60^\circ$, 故 $CD = \sqrt{a^2 + a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ} = 2a$.

10. C 【解析】设所选取的两个数分别为 x 、 y , 且 $x < y$, 事件“这两个数中较小的数大于 $\frac{2}{3}$ ”所表示

的集合为 $\left\{(x, y) \left| 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, x < y, x > \frac{2}{3} \right.\right\}$,

阴影部分的面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, 因此事件“这两个数中较小的数大于 $\frac{2}{3}$ ”的概率为

$P = \frac{S}{2^2} = \frac{16}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9}$, 故选 C.

12. A 【解析】因为直线 AB 过原点, 且在双曲线上, 所以 A, B 两点关于原点对称, 则可设

$A(x_1, y_1), B(-x_1, -y_1), P(x_2, y_2)$, 所以 $k_{PA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $k_{PB} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$, 由题意得

$k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{1}{3}$, 又由 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 相减得 $\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0$,

即 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{1}{3}$, $b^2 = \frac{1}{3}a^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{a^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14. $\sqrt{38}$ 【解析】因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 所以 $-8 + 2 + 3x = 0$ 解得 $x = 2$, 从而 $\vec{b} = (-4, 2, 2)$, 所以 $\vec{a} - \vec{b} = (6, -1, 1)$,

故 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{38}$.

16. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 【解析】 $\because |PF_1| \cdot |PF_2|$ 的最大值为 a^2 , $\therefore$ 由题意知 $2c^2 \leq a^2 \leq 3c^2$,

$\therefore \sqrt{2}c \leq a \leq \sqrt{3}c$, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leq e \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore$ 椭圆离心率 e 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

17. (1) 要使 $f(x)$ 有意义, 则 $3 - (x+2)(2-x) \geq 0$,

化简整理得 $(x+1)(x-1) \geq 0$, 解得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -1$, $\therefore A = \{x | x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1\}$.

(2) 要使函数 $g(x)$ 有意义, 则 $(x-a-1)(2a-x) > 0$, 即 $(x-a-1)(x-2a) < 0$,

又 $\because a < 1$, $\therefore a+1 > 2a$, $\therefore B = \{x | 2a < x < a+1\}$. $\because p$ 是 q 的必要不充分条件, $\therefore B$ 是 A 的真子集.

$\therefore 2a \geq 1$ 或 $a+1 \leq -1$, 解得 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 或 $a \leq -2$, $\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, 1)$.

18. (1) 由已知得椭圆的半长轴 $a = 2$, 半焦距 $c = \sqrt{3}$, 则半短轴 $b = 1$. 3 分

又椭圆的焦点在 x 轴上, $\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 5 分

(2) 设线段 PA 的中点为 $M(x, y)$, 点 P 的坐标是 (x_0, y_0) , 由 $\begin{cases} x = \frac{x_0 + 1}{2} \\ y = \frac{y_0 + \frac{1}{2}}{2} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x_0 = 2x - 1 \\ y_0 = 2y - \frac{1}{2} \end{cases}$, 由点 P 在

椭圆上, 得 $\frac{(2x-1)^2}{4} + (2y-\frac{1}{2})^2 = 1$, $\therefore$ 线段 PA 中点 M 的轨迹方程是 $(x-\frac{1}{2})^2 + 4(y-\frac{1}{4})^2 = 1$.

19. (1) 茎叶图 3 分

(2) 由图可知, 乙的平均成绩大于甲的平均成绩, 且乙的方差小于甲的方差, 且乙的最高分高于甲的最高分, 因此应选派乙参赛更好.

(3) 记事件 A : 甲的成绩比乙高从甲、乙两人 5 次的成绩中各随机抽取一

个成绩, 所有的基本事件如下: $\{86, 78\}, \{86, 82\}, \{86, 88\}, \{86, 82\}, \{86, 95\}$
 $\{77, 78\}, \{77, 82\}, \{77, 88\}, \{77, 82\}, \{77, 95\}$
 $\{92, 78\}, \{92, 82\}, \{92, 88\}, \{92, 82\}, \{92, 95\}$
 $\{72, 78\}, \{72, 82\}, \{72, 88\}, \{72, 82\}, \{72, 95\}$
 $\{78, 78\}, \{78, 82\}, \{78, 88\}, \{78, 82\}, \{78, 95\}$ 共 25 个

甲			乙		
8	7	2	7	8	
	6		8	2	2
	2		9	5	8

$\therefore$ 事件 A 有 $\{86, 78\}, \{86, 82\}, \{86, 82\}, \{92, 78\}, \{92, 82\}, \{92, 88\}, \{92, 82\}$, 共 7 个 $\therefore P(A) = \frac{7}{25}$

20. (1) 设 AB_1 与 A_1B 相交于点 P , 连接 PD , 则 P 为 AB_1 中点

$\because D$ 为 AC 中点, $\therefore PD \parallel B_1C$, 又 $\because PD \subset$ 平面 A_1BD , $\therefore B_1C \parallel$ 平面 A_1BD

(2) $\because$ 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, $\therefore AA_1 \perp$ 底面 ABC , 又 $\because BD \perp AC$, $\therefore A_1D \perp BD$,

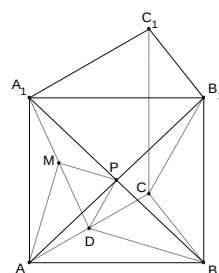
(3) $\therefore \angle A_1DA$ 就是二面角 $A_1 - BD - A$ 的平面角, $\because AA_1 = \sqrt{3}$,

$AD = \frac{1}{2}AC = 1$, $\tan \angle A_1DA = \frac{AA_1}{AD} = \sqrt{3}$, $\therefore \angle A_1DA = \frac{\pi}{3}$, 即二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小是 $\frac{\pi}{3}$

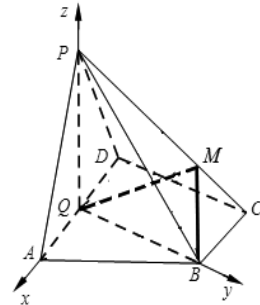
(3) 由 (2) 作 $AM \perp A_1D$, M 为垂足, $\because BD \perp AC$, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1ACC_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$, $\therefore BD \perp$ 平面 A_1ACC_1 , $\because AM \subset$ 平面 A_1ACC_1 , $\therefore BD \perp AM$ 又 $A_1D \cap BD = D$,

$\therefore AM \perp$ 平面 A_1DB , 连接 MP , 则 $\angle APM$ 是直线 A_1B 与平面 A_1BD 所成的角 $\because AA_1 = \sqrt{3}$, $AD = 1$, $\therefore$

在 $Rt \triangle AA_1D$ 中, $\angle A_1DA = \frac{\pi}{3}$, $\therefore AM = 1 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AP = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$,



$$\therefore \sin \angle APM = \frac{AM}{AP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \therefore \text{直线 } AB_1 \text{ 与平面 } A_1BD \text{ 所成的角的正弦值为 } \frac{\sqrt{21}}{7}$$



21. 【解析】(1) $\because Q$ 为 AD 的中点, $PA = PD = AD = 2$, $BC = 1$, $\therefore PQ \perp AD$, $QD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCDQ$ 是平行四边形, $\therefore DC \parallel QB$, $\because$ 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, $\therefore$

$BQ \perp AD$. 又 $BQ \cap PQ = Q$, $\therefore AD \perp$ 平面 PQB . $\because AD \subset$ 平面 PAD , $\therefore$ 平面 $PQB \perp$ 平面 PAD .

(2) $\because PQ \perp AD$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$, $\therefore PQ \perp$ 底面 $ABCD$,

以 Q 为原点, QA 所在直线为 x 轴, QB 所在直线为 y 轴, QP 所在直线为 z 轴建立如图所示的空间直角

坐标系, 则 $Q(0,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $C(-1,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$. 设 $M(a,b,c)$, 则 $\overrightarrow{PM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PC}$,

即 $(a,b,c-\sqrt{3}) = \frac{3}{4}(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3}) = (-\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4})$, $\therefore a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\therefore M(-\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$,

$\therefore \overrightarrow{QM} = (-\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$, $\overrightarrow{QB} = (0,\sqrt{3},0)$, 设平面 MQ 的法向量 $\mathbf{r} = (x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \overrightarrow{QM} = -\frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \\ \mathbf{r} \cdot \overrightarrow{QB} = \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

取 $x = 1$, 得 $\mathbf{r} = (1,0,\sqrt{3})$, 易知平面 BQC 的一个法向量 $\mathbf{n} = (0,0,1)$.

设二面角 $M-BQ-C$ 的平面角为 θ (显然 θ 为锐角), 则 $\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$,

$\therefore$ 二面角 $M-BQ-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{6}$.

22. 因为点 $(2,0)$ 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$, 所以 $a^2 = 4$; 因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 解得 $b^2 = 3$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(II) 设 $P(-1, y_0)$, $y_0 \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

①当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y - y_0 = k(x + 1)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12, \\ y - y_0 = k(x + 1), \end{cases} \text{ 得 } (3 + 4k^2)x^2 + (8ky_0 + 8k^2)x + (4y_0^2 + 8ky_0 + 4k^2 - 12) = 0,$$

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8ky_0 + 8k^2}{3 + 4k^2}$, 因为 P 为 MN 中点, 所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$, 即 $-\frac{8ky_0 + 8k^2}{3 + 4k^2} = -2$.

所以 $k_{MN} = \frac{3}{4y_0}$ ($y_0 \neq 0$), 因为直线 $l \perp MN$, 所以 $k_l = -\frac{4y_0}{3}$,

所以直线 l 的方程为 $y - y_0 = -\frac{4y_0}{3}(x + 1)$ ，即 $y = -\frac{4y_0}{3}(x + \frac{1}{4})$ ，显然直线 l 恒过定点 $(-\frac{1}{4}, 0)$ 。

②当直线 MN 的斜率不存在时，直线 MN 的方程为 $x = -1$ ，此时直线 l 为 x 轴，也过点 $(-\frac{1}{4}, 0)$ 。

综上所述直线 l 恒过定点 $(-\frac{1}{4}, 0)$ 。